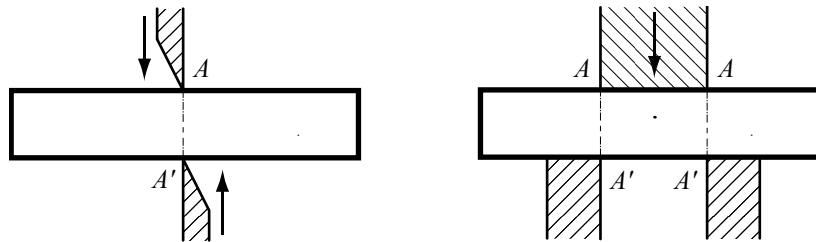


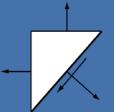
Mécanique des structures



Chapitre 4 : Cisaillement simple

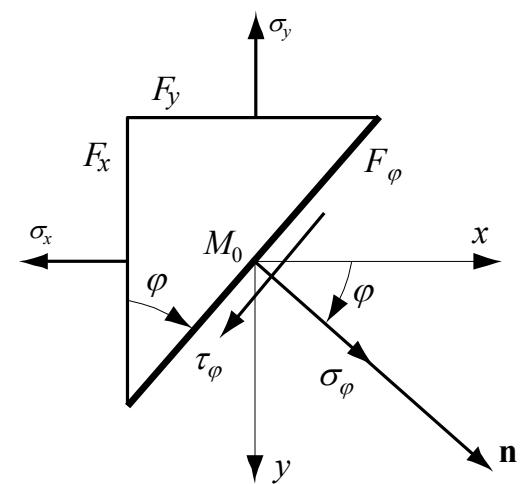
Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Rappel



Chapitre 4 : Cisaillement simple

Démarche et application

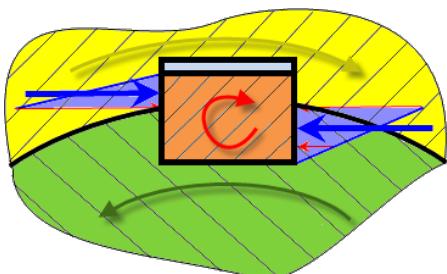
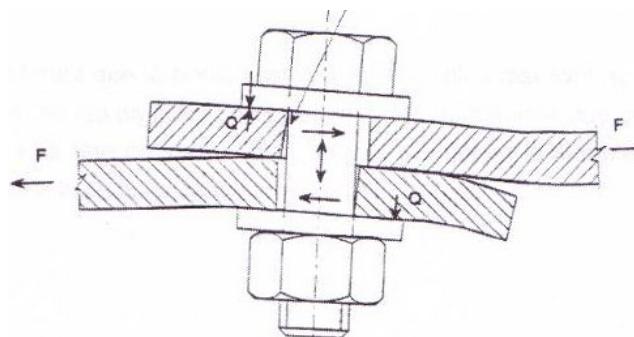
(A) Introduction des notions générales et des hypothèses

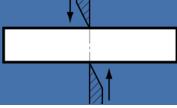
(B) Identification des efforts non-nuls

(C) Expression des contraintes normale et tangentielle résultante

(D) Analyse de l'état de contrainte

(E) Énergie de déformation (force & déplacement)





Chapitre 4 : Cisaillement simple

Démarche et application

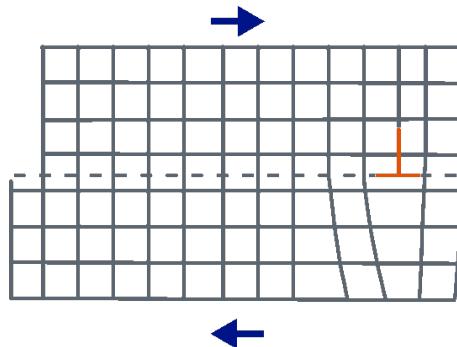
(A) Introduction des notions générales et des hypothèses

(B) Identification des efforts non-nuls

(C) Expression des contraintes normale et tangentielle résultante

(D) Analyse de l'état de contrainte

(E) Énergie de déformation (force & déplacement)

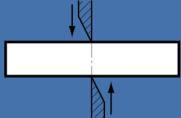


Dislocation métallurgique



Cisaillement d'une tige composite





Chapitre 4 : Cisaillement simple

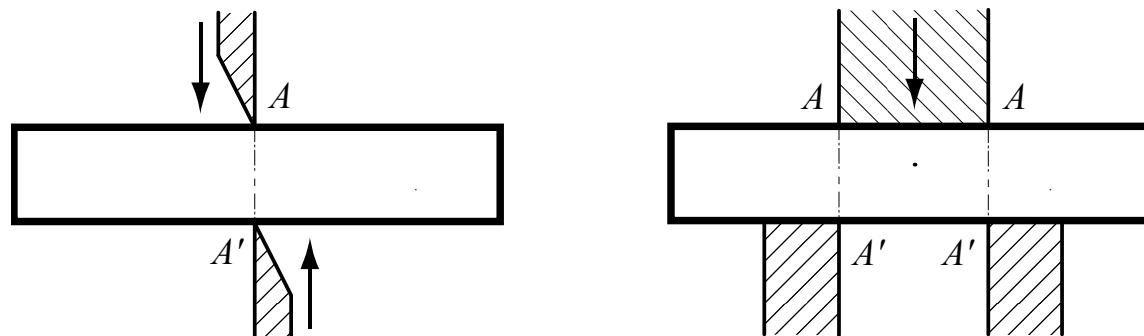
Définition et Notions générales

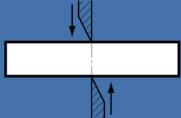
La section normale F d'un solide est soumise au **cisaillement simple** quand le torseur des efforts intérieurs se réduit à l'**effort tranchant** \mathbf{T} dans le plan de F

A l'exception de ces cas limites proches de la rupture, le cisaillement simple n'apparaît jamais isolément; il est toujours combiné à une autre sollicitation.

L'effort tranchant étant, dans les poutres droites, la dérivée du moment de flexion par rapport à l'abscisse x , le cisaillement simple ne peut exister que dans certaines sections particulières pour lesquelles sont remplies simultanément les conditions

- $\mathbf{M}_f = \mathbf{0}$
- $\frac{d\mathbf{M}_f}{dx} = \mathbf{T} \neq \mathbf{0}$



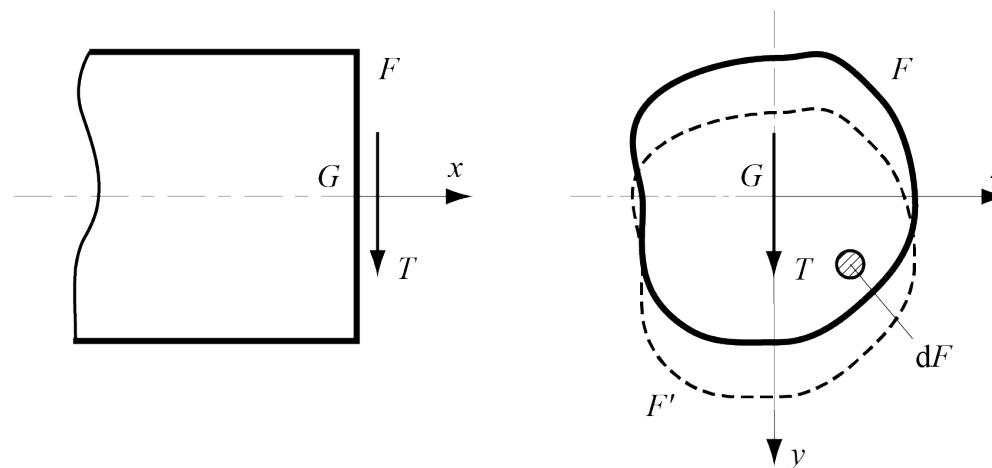


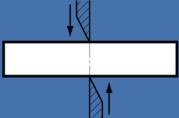
Chapitre 4 : Cisaillement simple

Contrainte de cisaillement

L'évaluation des contraintes dans une section soumise au cisaillement simple est basée sur l'hypothèse de Bernoulli et conduit à dire que : **la section F' après déformation se déduit de F par simple translation** dans la direction de l'effort tranchant \mathbf{T} (section plane avant déformation reste plane après déformation).

Avec cette hypothèse, les axes principaux d'inertie de la section ne jouent aucun rôle particulier. Il est donc possible, sans restreindre la portée des résultats, de choisir l'axe Gy dans la direction de l'effort tranchant \mathbf{T} ($T_y = T$, $T_z = 0$)





Chapitre 4 : Cisaillement simple

Contrainte de cisaillement

Les équations d'équilibre sont dès lors toutes nulles sauf la deuxième :

$$(a) \quad N = \iint_F \sigma \, dF = 0$$

$$(b) \quad T_y = \iint_F \tau_y \, dF$$

$$(c) \quad T_z = \iint_F \tau_z \, dF = 0$$

$$(d) \quad M_t = \iint_F \tau_z y - \tau_y z \, dF = 0$$

$$(e) \quad M_{fy} = \iint_F \sigma z \, dF = 0$$

$$(f) \quad M_{fz} = - \iint_F \sigma y \, dF = 0$$

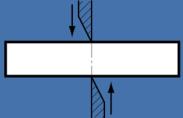
L'hypothèse admise (translation y de la section) entraîne nécessairement $\sigma = 0$ et $\tau_z = 0$ dans toute la section, de sorte que les équations (a), (c), (e) et (f) sont vérifiées.

De plus, cette hypothèse ne peut être remplie que si τ_y est constante :

$$\bullet \quad T_y = \iint_F \tau_y \, dF = \tau_y F \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{T}{F}$$

$$\bullet \quad M_t = \iint_F \tau_y z \, dF = \tau_y \iint_F z \, dF = 0$$

Vérifiée puisque le moment statique est nul pour tout axe passant par le centre de gravité G



Chapitre 4 : Cisaillement simple

Déformation en cisaillement simple

Somme des forces et des moments autour de l'axe Gz

- $\sum T_y = \tau_{xy} dydz - \tau_{-x-y} dydz = 0$

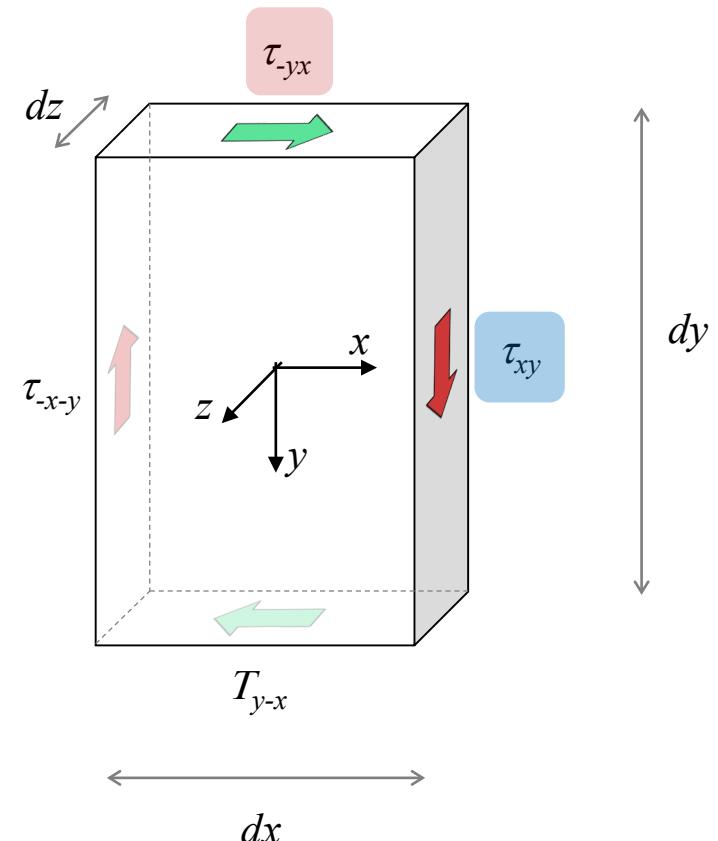
➤ $\tau_{xy} = \tau_{-x-y}$

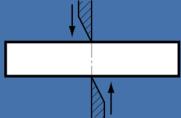
- $\sum T_x = \tau_{y-x} dxdz - \tau_{-yx} dxdz = 0$

➤ $\tau_{y-x} = \tau_{-yx}$

- $\sum M_z = 2 \tau_{xy} dydz \cdot dx/2 + 2 \tau_{-yx} dxdz \cdot dy/2 = 0$

➤ $\tau_{xy} = -\tau_{-yx}$





Chapitre 4 : Cisaillement simple

Déformation en cisaillement simple

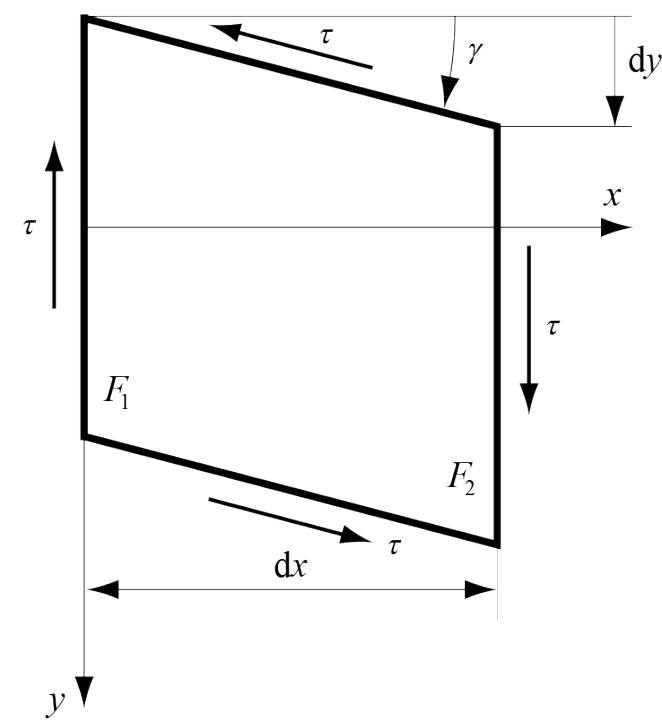
Considérons un élément de matière de longueur dx compris entre deux sections F_1 et F_2 infiniment proches, le moment de flexion $T dx$ étant ainsi négligeable en comparaison de l'effort tranchant T .

Par rapport à la face F_1 supposée fixe, la section F_2 est décalée d'une distance dy proportionnelle à dx et à la contrainte de cisaillement τ

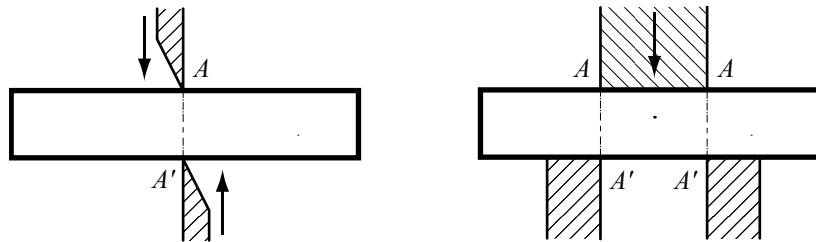
$$\bullet \quad dy = \frac{1}{G} dx \cdot \tau$$

Dans cette expression, le rapport $dy/dx = \gamma$ est l'*angle de glissement* et le facteur de proportionnalité G est le *module de glissement*, ces deux coefficients étant par conséquent liés par la relation

$$\bullet \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$



Mécanique des structures



Chapitre 4 : Cisaillement simple

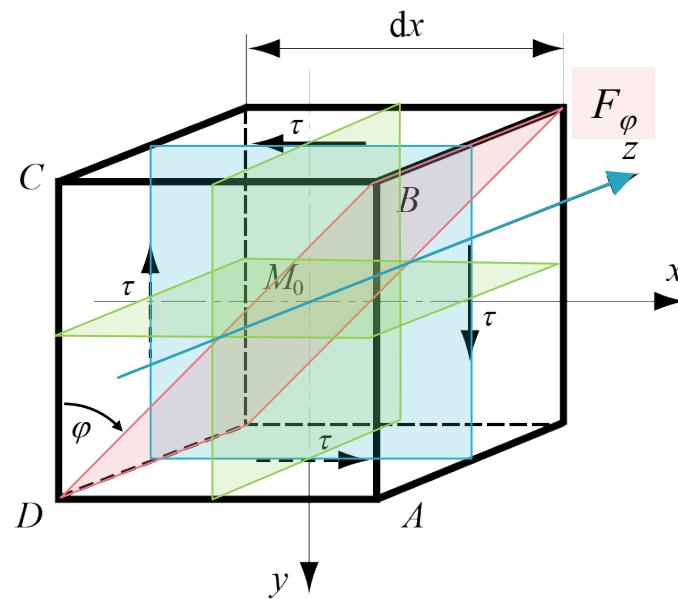
Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL

Chapitre 4 : Cisaillement simple

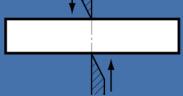
Analyse de l'état de contrainte

Soit un élément cubique autour du point M_0 . Les contraintes normales sont nulles sur toutes les faces ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$) et la contrainte tangentielle est nulle sur les faces perpendiculaires à M_0z . On en déduit que M_0z est un axe principal, et M_0xy un plan principal. L'état de contrainte du cisaillement simple est par conséquent bidimensionnel, une des contraintes principales étant nulle.



Représentation
2d – 3d
(pas de τ sur le
plan M_0xy)

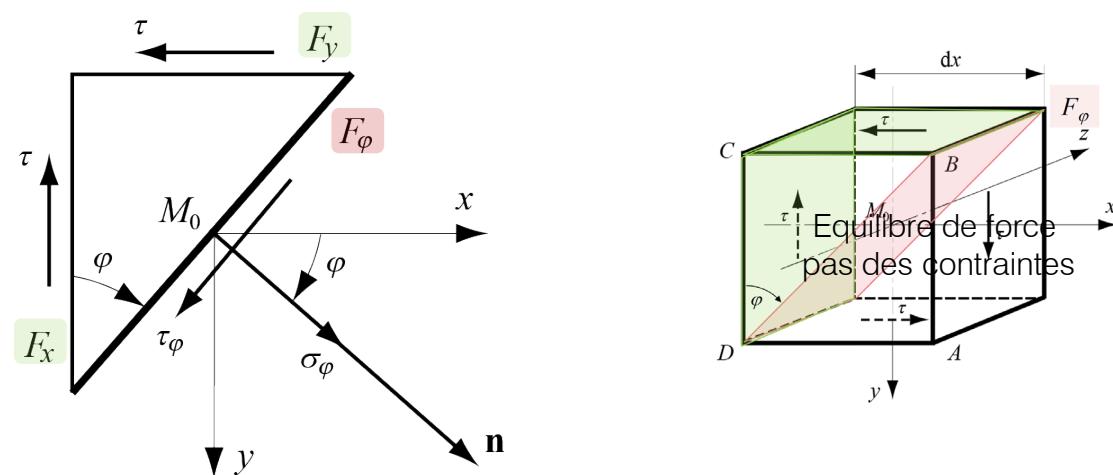
La contrainte tangentielle est $\tau_x = \tau$ dans les faces perpendiculaires à M_0x et vaut donc $\tau_y = -\tau$ dans les faces perpendiculaires à M_0y



Chapitre 4 : Cisaillement simple

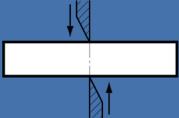
Analyse de l'état de contrainte

Considérons à nouveau une section oblique F_φ , perpendiculaire au plan principal M_0xy et tournant autour de l'axe M_0z , sa normale \mathbf{n} formant un angle φ avec l'axe M_0x



Les contraintes dans la section oblique F_φ en fonction des contraintes sur les axes de référence. Après projection sur la normale \mathbf{n} et la direction orthogonale de la section F_φ , l'équilibre des forces conduit aux équations suivantes

- $F_\varphi \sigma_\varphi - F_x \tau \sin \varphi - F_y \tau \cos \varphi = 0$
- $F_\varphi \tau_\varphi - F_x \tau \cos \varphi + F_y \tau \sin \varphi = 0$

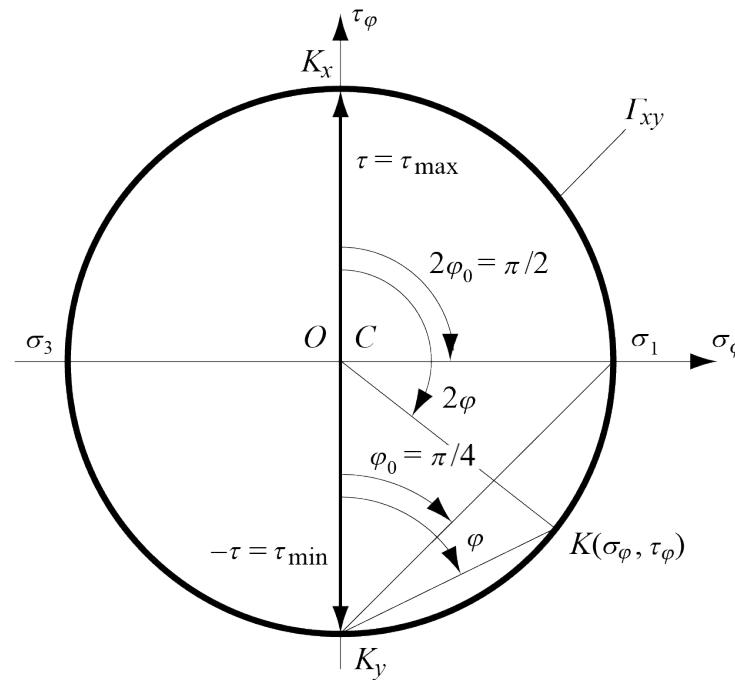


Chapitre 4 : Cisaillement simple

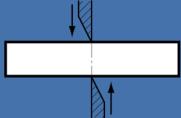
Analyse de l'état de contrainte

Compte tenu des définitions $F_x = F_\varphi \cos \varphi$ et $F_y = F_\varphi \sin \varphi$ et d'une simplification par F_φ des expressions obtenues

- $\sigma_\varphi = 2\tau \sin \varphi \cos \varphi = \tau \sin 2\varphi = \tau \cos 2(\varphi - \varphi_0)$
- $\tau_\varphi = \tau(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \tau \cos 2\varphi = -\tau \sin 2(\varphi - \varphi_0)$



où le déphasage φ_0 vaut $\pi/4$. On trouve une fois de plus les équations paramétriques d'un cercle, correspondant au *cercle de Mohr* fondamental I_{xy}



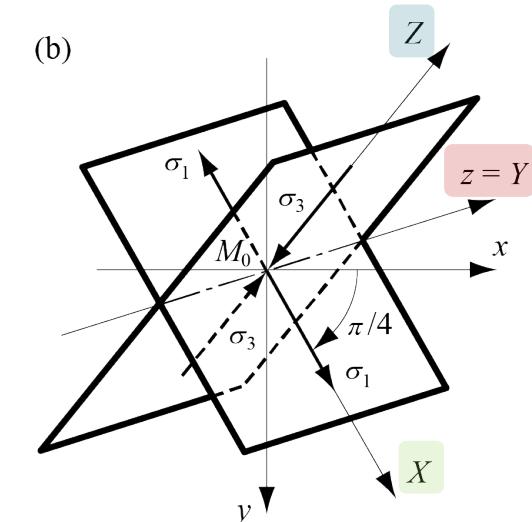
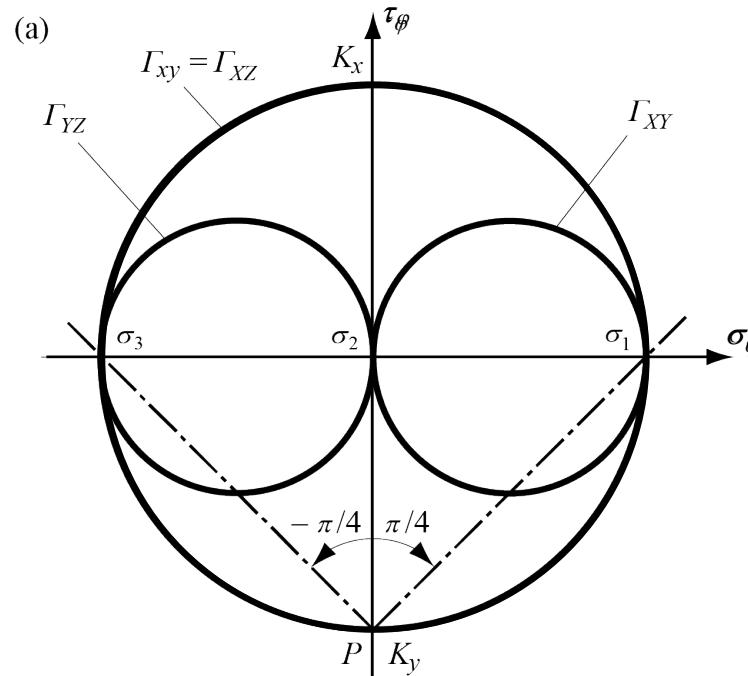
Chapitre 4 : Cisaillement simple

Analyse de l'état de contrainte

Les deux autres cercles sont symétriques par rapport à l'axe des τ .

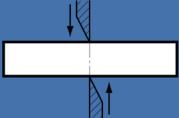
Les cercles de Mohr permettent de trouver immédiatement les contraintes principales et l'orientation des axes principaux correspondant.

- $\sigma_1 = +\tau$
- $\sigma_2 = 0$
- $\sigma_3 = -\tau$



L'axe z est un axe principale pour lequel la contrainte normal σ_2 est nulle (axe Y).

La contrainte principale σ_1 correspond à un déphasage φ_0 de $\pi/4$. On trouve ainsi l'orientation de l'axe principale X à 45° de l'axe x . Ainsi que l'axe principale Z à 45° de l'axe y .



Chapitre 4 : Cisaillement simple

Variation relative de volume

Le volume élémentaire ($dV = dx dy dz$)

- $$\begin{aligned} dV' &= dx(1 + \varepsilon_x) dy(1 + \varepsilon_y) dz(1 + \varepsilon_z) \\ &= dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z) \end{aligned}$$

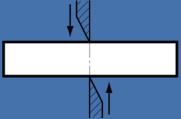
Si l'on néglige les puissances supérieures à 1 des allongements relatifs

- $dV' \cong dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$

La variation relative de volume s'exprime par

- $\nu = \frac{(dV' - dV)}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{E} (1 - 2\mu) = \frac{\tau - \tau}{E} (1 - 2\mu) = 0$

Ce qui montre qu'en cisaillement simple, la variation relative de volume est nulle.

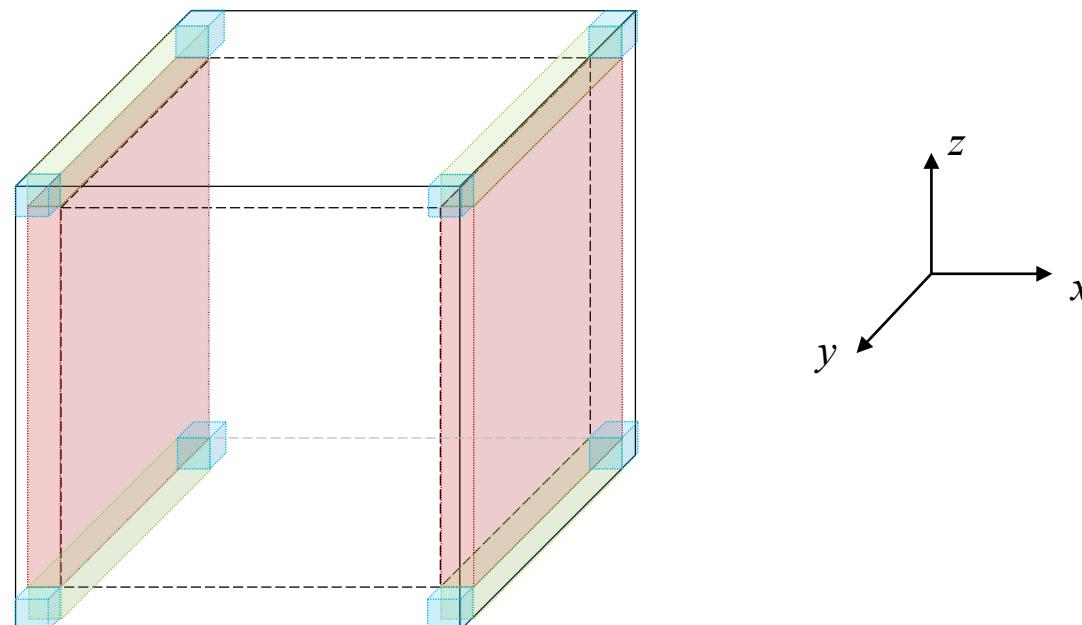


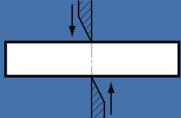
Chapitre 4 : Cisaillement simple

Variation relative de volume

Le volume élémentaire ($dV = dx dy dz$)

- $dV' = dx(1 + \varepsilon_x) dy(1 + \varepsilon_y) dz(1 + \varepsilon_z)$
 $= dx dy dz(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z)$





Chapitre 4 : Cisaillement simple

Énergie de déformation

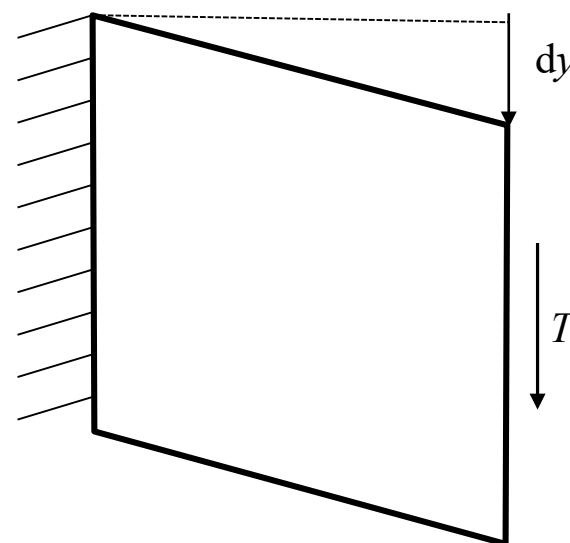
L'énergie de déformation en cisaillement simple équivaut au demi-produit de l'effort tranchant T par le glissement dy de la section F

$$\bullet \quad dU = \frac{1}{2} T dy = \frac{1}{2} \tau F \cdot \gamma dx = \frac{1}{2} \tau \gamma dV = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dV$$

\uparrow
 $\gamma = \frac{\tau}{G}$

En divisant par l'élément de volume dV et en introduisant le module de glissement on établit les trois expressions suivantes de la densité d'énergie en cisaillement simple

$$\bullet \quad u = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G \gamma^2}{2} = \frac{\tau \gamma}{2}$$





Chapitre 4 : Cisaillement simple

Module de Young et module de glissement

Le *module de glissement* n'est pas indépendant du *module d'élasticité* car les déformations dans le sens des contraintes principales σ_1 et σ_3 doivent être compatibles géométriquement avec les glissements dans le sens des τ .

Considérons la face $ABCD$ d'un cube en supposant que le côté CD d'arête dx reste fixe

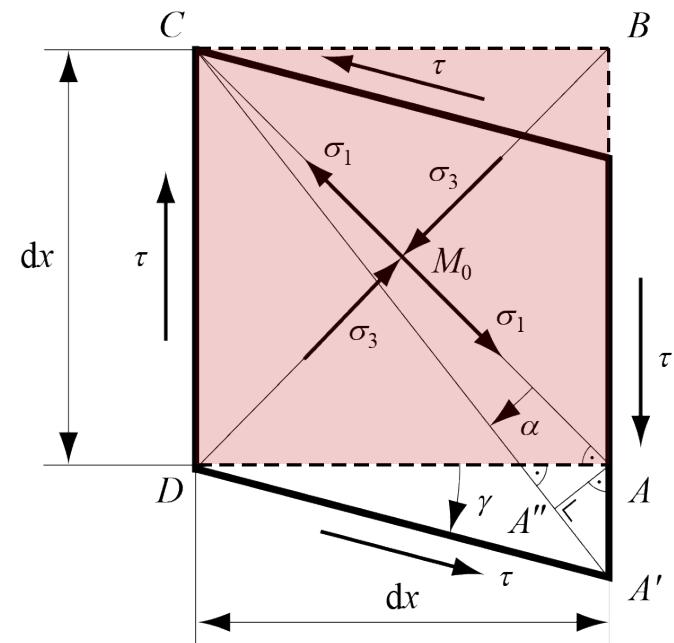
Après déformation, le point A devient A' avec

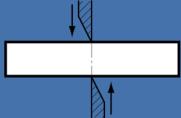
- $$\bullet \quad AA' = dx \gamma = dx \frac{\tau}{G}$$

Soit A'' la projection de A sur CA' . Les angles γ et α étant très petits, l'allongement de la diagonale AC est égal à $A'A''$

- $A'A'' = AC \varepsilon = dx\sqrt{2} \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_3) = dx\sqrt{2} \frac{\tau}{E} (1 + \mu)$

$$dx\sqrt{2} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}$$





Chapitre 4 : Cisaillement simple

Module de Young et module de glissement

Comme l'angle α est très petit, les triangles $AA'A''$ et ACD sont semblables

- $AA' = \sqrt{2} A'A''$

$$AA' = dx \gamma = dx \frac{\tau}{G}$$

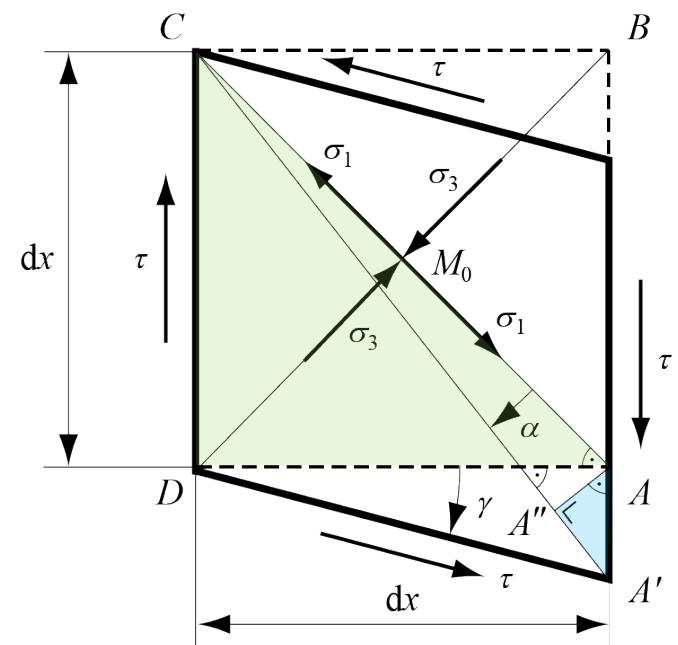
$$A'A'' = AC \varepsilon = dx\sqrt{2} \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_3) = dx\sqrt{2} \frac{\tau}{E} (1 + \mu)$$

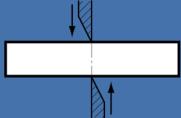
Cette condition entraîne l'égalité suivante

- $dx \frac{\tau}{G} = \sqrt{2}dx\sqrt{2} \frac{\tau}{E} (1 + \mu)$

Et, par conséquent, le lien entre les modules E et G a pour expression

- $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$





Chapitre 4 : Cisaillement simple

Module de Young et module de glissement

Comme l'angle α est très petit, les triangles $AA'A''$ et ACD sont semblables

- $AA' = \sqrt{2} A'A''$
- $\cos(45 - \alpha) = \cos(45) \cos(\alpha) + \sin(45) \sin(\alpha)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha$$

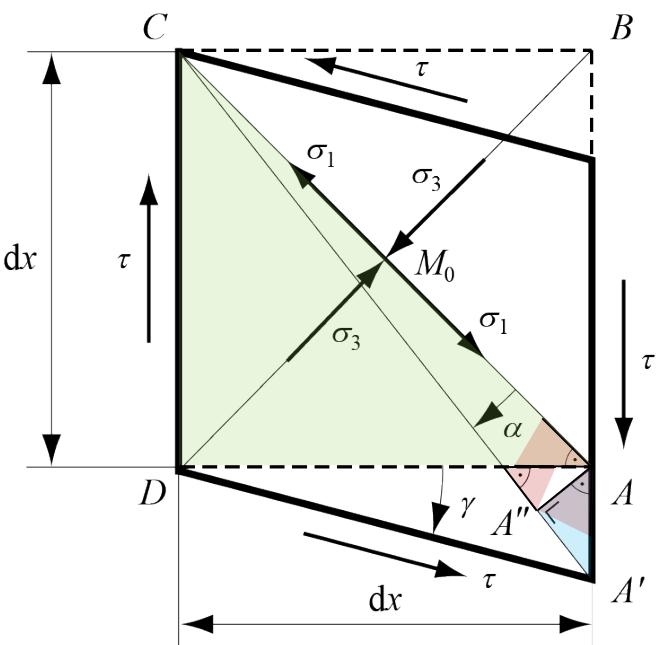
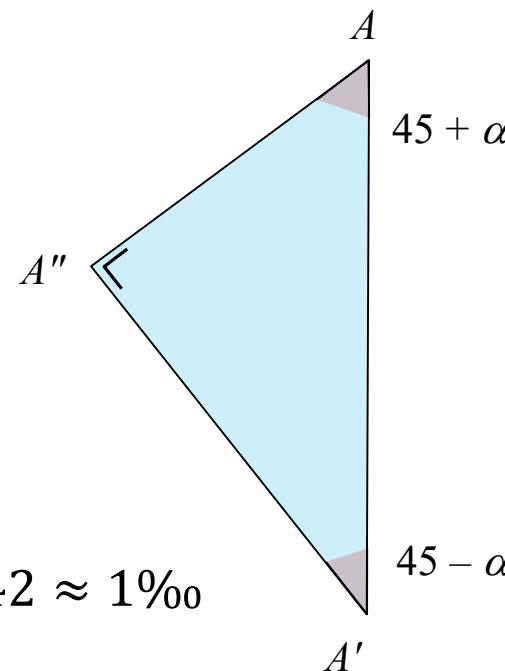
$$\cong \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \cos(45) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet \quad \cos(45 - \alpha) = \frac{A'A''}{AA'}$$

$$\bullet \quad \gamma = \frac{2\alpha}{1-\alpha} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\gamma}{2+\gamma}$$

$$\bullet \quad \gamma_{max} = \frac{\sigma_e}{G} \quad \text{et} \quad \alpha = 0.00142 \approx 1\%$$

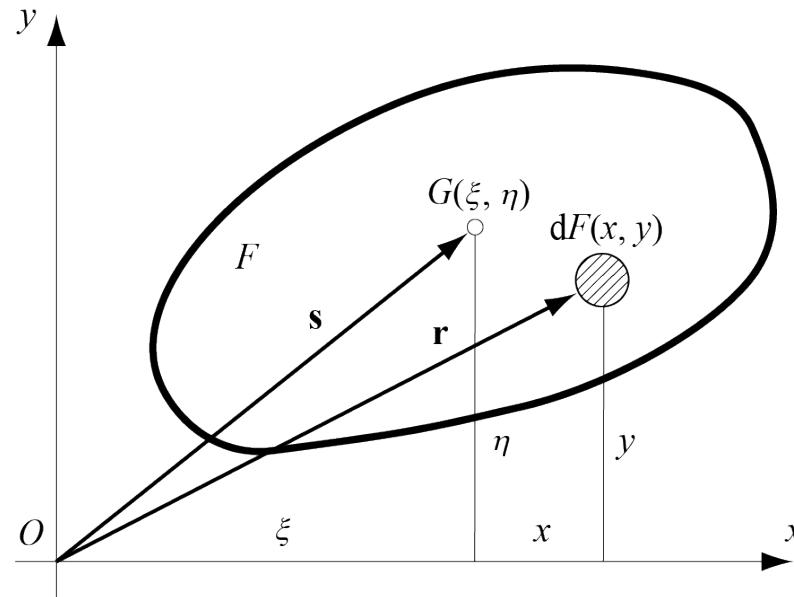


Annexe III : Moment d'une aire plane

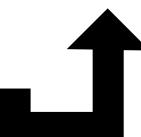
Moment du premier ordre

Les moments du premier ordre ou moments statiques d'une aire plane F du plan Oxy par rapport respectivement à l'origine O , à l'axe Ox et l'axe Oy se définissent de la manière suivante

- $\mathbf{S} = \iint_F \mathbf{r} dF$
- $S_x = \iint_F y dF$
- $S_y = \iint_F x dF$



où \mathbf{r} est le vecteur-lieu de l'élément d'aire dF . Relevons que les moments S_x et S_y sont simplement les composantes du moment \mathbf{S}

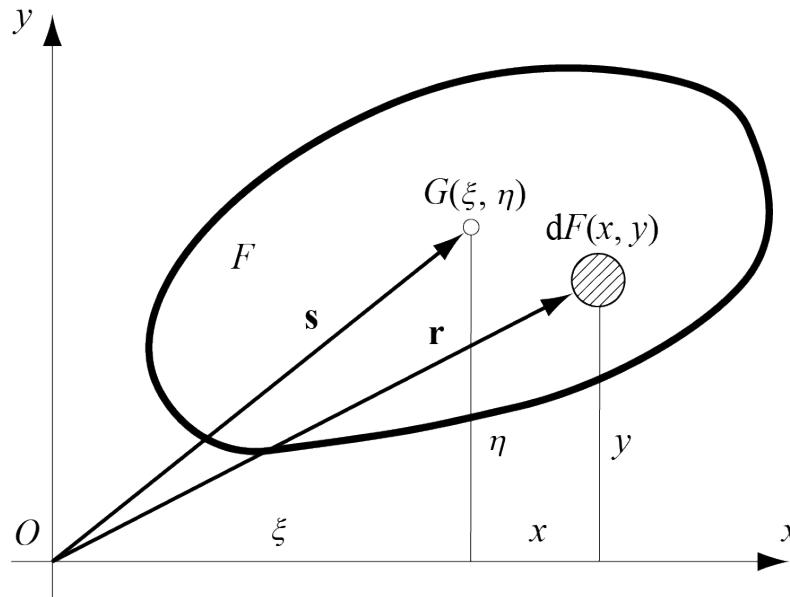


Annexe III : Moment d'une aire plane

Moment du premier ordre

La connaissance des moments statiques permet de déterminer la position \mathbf{s} du *centre d'inertie* G de l'aire, ainsi que ses deux composantes ξ et η

- $\mathbf{s} = \frac{\iint_F \mathbf{r} dF}{\iint_F dF} = \frac{\mathbf{s}}{F}$
- $\xi = \frac{\iint_F x dF}{\iint_F dF} = \frac{s_y}{F}$
- $\eta = \frac{\iint_F y dF}{\iint_F dF} = \frac{s_x}{F}$



Les moments S_x et S_y sont nuls lorsque les axes passent par le centre d'inertie G ($\xi = \eta = 0$)

